Proclo, *Commento al Timeo*
III libro – VIII sezione

III sezione: armonia dell'Anima

ἑκάστην δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην. ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε

> "risultando ciascuno dalla mescolanza dell'identico, del diverso e dell'essenza. Cominciò a dividere così"

I – Spiegazione del passo: di fatto, se i Generi che producono l'Anima si trovano tutti in tutte le sue parti, e se l'Anima è interamente omeomera rispetto a se stessa, non può assolutamente allontanarsi dalla continuità e dall'unità. Inoltre, se nel caso dei corpi le parti simili si uniscono strettamente senza intermedi, a maggior ragione nel caso della natura incorporea, le parti, se così le si può definire, sono tutte unificate ed il tutto è dominato dall'uno, né le parti finendo per essere confuse a causa del tutto, né la totalità degenerando a causa della distinzione delle parti – da ciò si può anche inferire che l'Anima, in tutte le sue parti, appartiene a se stessa e che è al contempo indivisibile e divisa, perché se ogni porzione partecipa a tutte le mescolanze mediane, non si può concepire nulla che nell'Anima non sia costituito da queste mescolanze. Avendo in mente ciò, è con buone ragioni che gli Antichi hanno affermato che l'Anima, interamente, è sia essere che vita che intelletto, in quanto non è possibile concepire uno di questi tre senza unirvi anche gli altri due poiché, nel caso dell'Anima, tutto penetra attraverso tutto, l'Anima nella sua interezza è *una*, l'unità dell'Anima è assolutamente perfetta, e ciò che in essa è parte è consustanziale rispetto al tutto. Inoltre, ciascuna delle numerose parti dell'Anima è un'essenza, e se tali parti sono in un certo numero, anche l'essenza dell'Anima comporta altrettanti aspetti nello stesso numero delle parti, e lo stesso vale per Identità e Differenza. Al contrario, nell'Intelletto, ciascuno di questi tre è uno – ed è per questo che l'Intelletto è indivisibile, poiché nell'Intelletto non vi sono diverse parti – mentre nell'Anima, ciascuno di questi tre è una molteplicità, poiché ciascuno di questi tre è frazionato secondo un numero conforme all'essenza, e le parti sono tutte in armonia l'una con l'altra, costituendo l'Anima *una*, composta di multipli e tutto composto di parti. Ecco inoltre ciò che bisogna prendere in considerazione: nella produzione degli elementi, Platone era partito dall'Essenza, come si era detto; nella costituzione del Tutto, era partito dalla Differenza, "collegando a forza la natura del diverso, che era difficile a mescolarsi, con quella dell'identico”; ora, nella divisione del tutto in rapporti armonici ha iniziato dall'Identità, poiché di fatto dice “risultando ciascuno dalla mescolanza dell'identico, del diverso e dell'essenza.” Infatti, nella generazione degli enti semplici è assolutamente appropriato iniziare dall'Essenza, poiché l'Essenza è più semplice di tutto il resto; nella costituzione del tutto, è appropriato iniziare dalla Differenza, poiché la generazione dell'intero che si costituisce dalle parti inizia da ciò che è inferiore; nella costituzione dell'armonia, è appropriato iniziare con l'Identità, poiché l'armonia tende a realizzarsi nell'identità e nella comunione delle parti divise e, in modo generale, l'armonia mira a creare identità fra le cose che essa armonizza.

II – Divisione armonica dell'Anima

[Riportiamo lo scolio che apre questa sezione, il quale contiene una “definizione dei termini impiegati nel *Trattato sull'Armonia*”: - Nota: la più piccola parte di un canto tonale; - Intervallo: portata di voce ricompresa da due note; - Sistema: portata di voce abbracciata da più di due intervalli; - Multiplo: di due numeri, quello che è misurato dal più piccolo numero aggiunto a se stesso due, tre o un numero maggiore di volte (ad esempio, quello base 2/1); - Epimorio: di due numeri, quello che contiene una volta il numero più piccolo ma con una frazione di questo, sia la metà sia 1/3 sia qualche altro (con 'epimorio' si indica il rapporto di due numeri che differiscono di una unità se ridotti alla loro più semplice espressione, il *pithmene* ovvero 'ai minimi termini' – praticamente, il numero maggiore comprende in sé il minore con in più una parte di esso, l'unità; però il valore relativo di questa unità varia a seconda, ed in proporzione inversa, della grandezza dei numeri del rapporto, dal che si originano varie specie di rapporti epimorici: il primo rapporto di questo genere sarebbe il multiplo base 2/1, ma i Pitagorici appunto consideravano il primo epimorio 3/2, uguale ad uno e un mezzo, designato anche come *emiolio*, poi 4/3 ossia l'*epitrito*, etc. 'Epimorio', ossia *epí*, sopra+*meros*, parte, ossia un rapporto numerico in cui il numeratore sovrasta, sta sopra letteralmente, una propria parte di un'unità, ossia, come abbiamo visto nell'esempio: 3/2 dove 3 supera 2 di un'unità e che si può anche esprimere come 1+1/2); - Quarta: sistema composto di quattro note, quando la nota estrema sta all'altra nota estrema in un rapporto epitrito (1+1/3 – 'epitrito' ossia da *epí*, sopra+*tritos*, terzo, quindi “sopra il terzo” ma anche “somma con il terzo”: come si è detto, 1+1/3, ossia 3/3+1/3=4/3); - Quinta: sistema risultante da cinque note, quando la nota estrema sta all'ultima nota in un rapporto emiolio (1+1/2 – 'emiolio' ossia *hemí*, metà+*holos*, pieno, per l'appunto 1+1/2, ovvero 2/2+1/2=3/2); - Ottava: sistema composto dalla quinta e dalla quarta, di otto note, quando la prima nota sta all'ultima in un rapporto di 2 a 1 (dall'*Introduzione all'Aritmetica* di Nicomaco, sappiamo che 1:1 corrisponde all'accordo di 'unisono'; quindi, 1, moltiplicato per il primo numero che lo supera, ossia 2, dà appunto 2 e 2:1 è esattamente il rapporto che esprime l'accordo di 'ottava'); - Ottava+Quinta: sistema composto da dodici note, quando uno dei due estremi è con l'altro estremo in un rapporto di 3:1; - Doppia Ottava: sistema composto di quindici note, in cui una nota estrema sta all'altra nota estrema in un rapporto di 4:1; Pollaplasiepimero: numero contenente un numero più piccolo di sé due volte o due e frazioni di questo numero; inoltre, o è simile, ad esempio l'8 è pollaplasiepimero di 3 poiché contiene due volte il 3 più i due terzi di 3, oppure dissimile, ad esempio l'11 che contiene due volte il 4 più i tre quarti di quattro; - Epogdoo (letteralmente, “somma con l'ottavo”): numero contenente un numero più piccolo di sé più un ottavo di questo numero (ossia 1+1/8, cioè 8/8+1/8=9/8). A questo punto riportiamo anche la spiegazione di Macrobio (*Commento al Sogno di Scipione*, II, 1, 14 ss.): “da questa innumerevole gamma di numeri se ne trovarono una quantità limitata e poco numerosa adatta a formare degli accordi per produrre della musica … e sono l'epitrito, l'emiolio, la doppia, la tripla, la quadrupla e l'epogdoo. L'epitrito esprime il rapporto di due numeri di cui il maggiore contiene tutto quanto il minore e inoltre la sua terza parte, e sono tra essi come 4 rispetto a 3. Infatti, nel 4 c'è il 3 ed il terzo di 3, ossia 1. Questo numero si chiama epitrito e genera l'accordo chiamato διὰ τεσσάρων (accordo di quarta). L'emiolio è il rapporto di due numeri di cui il maggiore contiene interamente il minore ed in più la sua metà; per esempio, 3 rispetto a 2. Infatti, nel 3 c'è il 2 e la sua metà, ossia 1. E' da questo numero, detto emiolio, che nasce l'accordo che si chiama διὰ πέντε (accordo di quinta). La doppia è il rapporto di due numeri, di cui il maggiore contiene due volte il minore, o che sono tra essi come 4 rispetto a 2. Tale doppia genera l'accordo che porta il nome di διὰ πασῶν (accordo di ottava). La tripla poi è il rapporto che si verifica fra due numeri quando il maggiore contiene esattamente tre volte il minore, o che stanno l'uno all'altro come 3 rispetto a 1. E' da questo rapporto che proviene l'accordo denominato διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε (accordo di ottava più quinta). La quadrupla è il rapporto che si ha quando, dati due numeri, il maggiore contiene quattro volte il minore, come 4 rispetto a 1. Questo rapporto costituisce l'accordo δὶς διὰ πασῶν (accordo di doppia ottava). L'epogdoo è un numero che contiene un numero minore e in più l'ottava parte di quest'ultimo; tale è il rapporto di 9 rispetto a 8, perché nel 9 c'è l'8 e l'ottava parte di 8, ossia 1. Questo numero genera un intervallo che i musici designarono con il nome di τόνος (tono).” Detto in termini un poco più famigliari, dato un DO iniziale, l'accordo di ottava definisce l'altezza del DO dell'ottava successiva, gli accordi di quinta e di quarta rispettivamente del SOL e del FA intermedi; in tal modo, fra il FA ed il DO si definisce un ulteriore intervallo di quarta, mentre fra il SOL ed il FA l'intervallo è pari a un tono (9:8). Bisogna a tal punto riempire con altre note gli intervalli di quarta presenti agli estremi della scala: nella scala musicale pitagorica, partendo da un suono iniziale (1:1 l'unisono), poniamo il DO, si individua il suono concordante, ossia il SOL, che è prodotto da una corda la cui lunghezza è pari ai 2/3 di quella che ha prodotto il DO: si definisce così l'accordo di quinta, DO-SOL; poi, una corda pari ai 2/3 di quella che ha prodotto il SOL darà un suono più acuto, il RE dell'ottava successiva: andando avanti così, per quinte ascendenti, si definiscono in dodici passaggi tutti i toni e semitoni della scala greca tradizionale. Detto in estrema sintesi, si parte dai rapporti numerici corrispondenti agli intervalli sonori noti come armonici, ossia 1/1, 4/3, 3/2 e 2/1; poi, li si moltiplica e li si divide per 2/3, ossia per "quinte" come nell'esempio menzionato prima, e se il risultato è maggiore di 2 lo si divide per 2, se invece è minore di 1 lo si moltiplica per 2. Eseguendo la procedura, se ne ricavano (in otto passaggi) i seguenti valori in ordine crescente: 1/1, 9/8, 4/3, 3/2, 16/9, 2/1 – questi ultimi cinque danno la "scala pentatonica". Ora, applicando ai due nuovi valori (rispetto a quelli armonici di base) di questa scala, ossia 9/8 e 16/9, la stessa procedura di prima per "quinte", otteniamo altri valori (in altri quattro passaggi, che dà il numero complessivo di dodici, come detto prima) ossia 27/16 e 32/27: ebbene, aggiungendo questi nuovi valori alla scala pentatonica si ottiene la scala completa, ossia 1/1, 9/8, 32/27, 4/3, 3/2, 27/16, 16/9, 2/1]

Dopo aver fatto queste distinzioni nel modo più chiaro possibile, ora dobbiamo in primo luogo trattare di quel che dobbiamo tenere ben presente per comprendere i numeri e i rapporti che caratterizzano l'armonia dell'Anima, per evitare che gli sviluppi che ne seguiranno siano senza conseguenze. Bisogna dunque, prima di spiegare questi rapporti, ricordare quel che si ha l'abitudine di dire nei corsi e nei trattati di armonia, e definire il suono, l'intervallo, il sistema di intervalli, ed osservare che i Pitagorici hanno considerato gli accordi dell'armonia solamente nel dominio dei numeri, scegliendovi, ad esclusione di tutti gli altri numeri, quelli che formano delle progressioni geometriche e quelli il cui rapporto si esprime con una frazione il cui numeratore supera di un'unità il denominatore. Così, i Pitagorici hanno definito la quarta con il rapporto di 4/3, la quinta con il rapporto 3/2, e l'ottava con il rapporto 2/1, l'intervallo di ottava+quinta con il rapporto 3/1, l'intervallo di due ottave con il rapporto 4/1. A loro avviso, l'ottava con la quarta non formano un accordo perché questo intervallo si esprime con una frazione il cui il numeratore sorpassa il denominatore di un numero che oltrepassa l'unità, ossia con il rapporto 8/3. Fra 3 e 8 si situa di fatto il numero 6, che forma con il termine più piccolo il rapporto 2/1, e con quello maggiore il rapporto inverso di 4/3. In aggiunta a queste nozioni preliminari, dobbiamo ricordare che il rapporto 9/8 è quello del tono, che 4/3 è il rapporto dell'intervallo che comprende due toni e un leimma, 3/2 il rapporto di un intervallo comprendente tre toni e un leimma [cf. sempre da Macrobio: "gli Antichi vollero chiamare semitono il suono inferiore al tono. Ma guardiamoci bene dal credere che si tratti della metà di un tono … il tono ha per base il numero 9 e il 9 non è divisibile per due, quindi il tono rifiuta la divisione in due. Ciò che fu chiamato semitono è l'intervallo, inferiore al tono, che si è dimostrato essere così poco distante dal tono quanto lo sono l'uno dall'altro i due numeri 243 e 256. Gli antichi Pitagorici chiamavano questo semitono *diesis* … Platone chiamò il semitono 'leimma' …l'accordo di quarta (4/3) consta in due toni e un semitono… l'accordo di quinta (3/2) comprende tre toni e un semitono.” Pertanto, il tono esprime la differenza fra una quinta e una quarta, il che equivale a trovare il rapporto di epogdoo, ossia quinta-quarta= (3/2) / (4/3)= 9/8. Per questo, il tono non è divisibile in due parti uguali, perché il rapporto 9/8 non ha metà e, come dice Plutarco (*La generazione dell'Anima nel Timeo* 17): “i Pitagorici ritennero impossibile la divisione in due parti uguali (del tono) e delle due parti disuguali chiamarono la minore leimma (resto), poiché resta al di sotto della metà.” Ecco dunque come procedevano i Pitagorici: il semitono è il leimma, ciò che resta quando dalla quarta (4/3) si sottraggono due toni (da notare che, quando gli Antichi trattano di musica, esprimono sempre, come Proclo stesso, le operazioni sugli intervalli in termini di addizioni e sottrazioni, sebbene si tratti in realtà di moltiplicazioni e divisioni) - per ottenere due toni, si moltiplica l'epogdoo, il tono, per se stesso ossia 9/8 x 9/8= $(9/8)^2$. Così il semitono, differenza fra la quarta ed il doppio tono si esprime così: (4/3) : $(9/8)^2$ = 4/3 : 81/64= 4/3 x 64/81= 256/243 (i due numeri forniti prima da Macrobio per la definizione del semitono, e Filolao aveva usato esattamente il termine '*diesis*' per descrivere l'intervallo 256:243)] Ad ogni modo, ciò che riguarda la produzione del rapporto di semitono/leimma, lo apprenderemo meglio in seguito.

Dobbiamo ora ricordare che in armonia esistono tre generi, il diatonico, l'enarmonico ed il cromatico, e che il genere diatonico comprende un semitono – più esattamente, un intervallo che si è convenuto chiamare semitono ma che non lo è realmente, perché è un leimma – un tono ed un secondo tono. Il genere enarmonico comprende una sequenza di due intervalli di passaggio e un intervallo di due toni (praticamente, un ditono e due intervalli di due quarti di tono); infine, il genere cromatico comprende una sequenza di due semitoni e un intervallo di un tono e mezzo. Ora, l'intervallo di passaggio può essere assimilato a un quarto di tono, senza però essere veramente un quarto di tono, come il leimma non è esattamente un semitono, ma questo lo mostreremo, come si è detto, in seguito. Fra questi tre generi, in cui ciascuno divide a suo modo la gamma a quattro note del tetracordo (perché alla base del sistema musicale greco vi è appunto il tetracordo, una successione di quattro corde, i cui estremi sono compresi nell'ambito di un intervallo di quarta giusta – gli estremi sono perciò fissi, quelli interni mobili: l'ampiezza degli intervalli di un tetracordo caratterizza i tre generi della musica greca, come si è detto, diatonico, enarmonico e cromatico), sembra che Platone non abbia utilizzato che il genere diatonico, poiché scompone i rapporti di quarta, 4/3, in due toni di rapporto 9/8 ed un leimma (2 toni e un leimma, appunto il diatonico), ma non in intervalli di passaggio propri dell'enarmonico, né in intervalli di due toni o di un tono e mezzo; però ha aggiunto il qualificativo 'enarmonico' (per precisare che egli rigetta solo gli intervalli di passaggio del genere enarmonico), perché alcuni fra gli Antichi chiamavano 'intervallo di passaggio' anche il semitono (dei generi diatonico e cromatico). Platone ha senza dubbio adottato il genere diatonico perché è al contempo più potente, più semplice e più nobile rispetto agli altri, benché il genere enarmonico sembri avere un maggior valore educativo. Secondo la mia intuizione personale, il genere enarmonico rappresenta il sistema della Vita universale del Cosmo, la quale si è sparsa dappertutto dividendosi nei corpi, così come il genere diatonico rappresenta il sistema della dialettica, ed è per questa ragione che il genere enarmonico può essere utile all'educazione, nella conoscenza della Vita universale. Il genere cromatico infine rappresenta rappresenta un sistema ideale della natura corporea ed è per questo che è privo di vigore e di nobiltà. Il genere enarmonico è quindi giustamente considerato come adatto all'educazione, e Socrate, nella *Repubblica* (III, 399), lo onora di una menzione particolare fra le armonie. Ciò nonostante, anche se Timeo ha ascoltato tutto ciò proprio da Socrate, dà ora consistenza alla realtà dell'Anima per mezzo del genere diatonico, e non con quello enarmonico, nonostante sia adatto all'educazione – in realtà, è a causa delle proprietà matematiche del genere enarmonico che si chiamano 'armonici' nel senso proprio gli insegnanti di armonia. Così almeno pretende Aristosseno nel primo libro dei suoi *Elementi di armonia*, quando afferma che “coloro che nei tempi antichi si sono occupati di studi di armonia sono stati degli armonici nel vero senso della parola; poiché in effetti costoro hanno studiato il genere enarmonico di per sé, e non hanno mai preso in considerazione gli altri generi.” Aristosseno aggiunge persino un commento stupefacente, ossia che gli Antichi non conoscevano la gamma diatonica, perché in effetti scrive: “solamente la gamma fondata sui sistemi enarmonici è attestata, ma nessuno ha mai visto presso di loro la gamma diatonica né quella cromatica.” Possiamo veramente stupirci che Aristosseno dica questo, malgrado la testimonianza stessa di Platone, che appunto costruisce la gamma secondo il genere diatonico, e malgrado anche la testimonianza dei Pitagorici, a meno che non si sottoscriva l'accusa lanciata ad Aristosseno da Adrasto di Afrodisia, il quale dice che quell'uomo per temperamento non è assolutamente un musico e che il suo unico scopo era quello di sembrare che stesse dicendo qualcosa di nuovo. Dunque, Platone opera la divisione delle gamme dei tetracordi nel genere diatonico, e non avanza solamente fino all'ottava, bensì fino al limite di un intervallo comprendente quattro ottave, una quinta ed un tono (come afferma anche Teone di Smirne, *Conoscenze matematiche utili alla lettura di Platone* p.104, Platone conduce la scala musicale sottesa alla formazione dell'Anima “fino alla quarta διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε e un tono.” La scala formata da quattro ottave, una quinta e un tono permette, addizionando i rapporti numerici che definiscono questi intervalli [per sommare due intervalli si moltiplicano i rapporti l'uno con l'altro, ossia la somma di due intervalli corrisponde al prodotto dei loro rapporti – ad esempio, quinta+quarta= (3/2) x (4/3)= 2/1, l'ottava], di ottenere il numero 27, che ritroveremo a breve nella costituzione dell'Anima stessa). Però, se si hanno difficoltà ad immaginare in che modo Platone abbia potuto assegnare una tale estensione alla scala dei suoni, dice Adrasto – infatti, Aristosseno aveva limitato la gamma in uso allora ad un intervallo comprendente un'ottava e una quarta; i teorici più recenti invece hanno esteso l'intervallo utilizzato a due ottave aumentate di un tono, creando così la gamma a quindici note – bisogna rispondere che questi creatori di gamme hanno operato così avendo in mente l'uso presso gli esseri umani, nell'ipotesi che nessuno possa superare i limiti delle loro gamme, né i cantanti alle grandi competizioni con le loro voci, né gli ascoltatori con il loro potere di percezione, mentre Platone, avendo in mente il Cosmo, compone l'Anima di tutti questi intervalli, con lo scopo di arrivare fino ai numeri cubici, indispensabili, perché l'Anima deve presiedere a realtà a tre dimensioni. I sette termini (1,2,3,4,9,8,27) infatti marcano necessariamente la progressione della gamma fino al limite di un intervallo comprendente quattro ottave e una quinta, come dimostra il maggiore dei termini posti da Platone, il 27 – e questo può bastare sulle difficoltà relative all'estensione della gamma.

Riassumendo, il capitolo sull'armonia dell'Anima è diviso in tre parti, di cui la prima ha per oggetto la deduzione dei sette numeri (1,2,3,4,9,8,27), la seconda l'inserimento dei due medi (aritmetico ed armonico), la terza la divisione delle quarte, nel rapporto 4/3, e delle quinte, nel rapporto 3/2, in toni, nel rapporto 9/8, ed in leimmata (anticipando un poco: prendiamo l'intervallo 2/1, ossia quello di ottava, la cui media aritmetica è 3/2 e quella armonica 4/3, che dividono l'ottava armonicamente – quindi, nell'intervallo di ottava sono inseriti l'intervallo di quinta e quello di quarta, il primo dei quali supera il secondo di un tono (9/8), che detratto due volte dalla quarta dà per residuo il leimma/*diesis*, che si ha anche dalla quinta da cui siano stati detratti tre toni: queste sono le assise della gamma diatonica pitagorico/platonica, e quindi vedremo poi meglio che l'Anima è stata organizzata secondo l'ottacordo pitagorico costituito da due tetracordi disgiunti da un intervallo di tono). Per questa ragione, alcuni teorici hanno l'abitudine di costruire tre triangoli, e di scrivere sul più piccolo i sette numeri (1,2,3,4,9,8,27), ponendo l'unità sulla sommità e distribuendo gli altri sei numeri da una parte e dall'altra, da un lato quelli che dipendono dal 2 (2,4,8) e dall'altra quelli che dipendono dal 3 (3,9,27); su un triangolo più grande, costruito attorno al primo, hanno l'abitudine poi di scrivere dei numeri maggiori, proporzionali ai numeri di Platone, e di inserire nei loro intervalli, come per le due serie, i due medi, sempre disponendo da un lato quelli facenti capo al 2 e dall'altro quelli dipendenti dal 3 con l'unità al vertice; nello stesso modo, su un terzo triangolo costruito attorno ai primi due, scrivono tutta la gamma adottando lo stesso procedimento. Adrasto ha fatto in questo modo. Altri hanno invece respinto la figura in forma di Λ (infatti questa è la tradizione del 'lambdoma pitagorico', che risale a Crantore, secondo cui le due progressioni che fanno sempre capo, come si è detto, all'unità, vanno disposte secondo la figura a due spioventi, ossia la lambda) e pongono di seguito l'uno all'altro, come su una riga, le tre specie di numeri, e così faremo anche noi – questo è anche il procedimento adottato da Porfirio e da Severo (perciò, concludiamo dicendo che, per illustrare il passo relativo alla serie numerica, alternanza di potenze quadre e cubiche di 2 e 3, gli Antichi usavano due tipi di schemi: quello a triangolo/lambda oppure quello lineare, su cui si dispongono tutti i numeri della serie in successione). Chiudiamo qui i chiarimenti preliminari, aggiungendo che Platone ha diviso questo capitolo appunto in tre parti, di cui ha riservato la prima alle sette divisioni in cui si situano i tre intervalli nel rapporto 2/1 ed i tre intervalli nel rapporto 3/1, i termini che li limitano essendo in progressione geometrica, la seconda all'inserimento dei due altri medi, aritmetico ed armonico in ciascuno degli intervalli della serie del 2 e di quella del 3 (ossia, date le prime due progressioni principali, dal 2 e dal 3, si devono riempire gli intervalli così ottenuti con altri numeri, in modo da completare le progressioni – così, si devono inserire altri numeri fra gli intervalli primari, in modo che ciascuno di essi sia riempito da un numero che è media armonica e da un altro che è media aritmetica), e la terza alla divisione delle quarte, in rapporto 4/3, e delle quinte, in rapporto 3/2, in toni, in rapporto 9/8 ed in leimmata – i ragionamenti sulle divisioni dell'Anima si limitano a questo (perciò, con le successive intercalazioni di cui abbiamo parlato, ne derivano intervalli costituiti da 3/2, 4/3 e 9/8 – questo intervallo minore serve per colmare anche gli altri due maggiori, ma ciascuno di questi due, come sappiamo, non viene colmato interamente, ma rimane un 'resto' in ciascuno, appunto, i leimmata, in rapporto, come abbiamo visto in precedenza, di numero a numero un intervallo di 256/243 – così si esaurisce in effetti la divisione dell'Anima).

Bisogna ora anche tenere ben presente ciò che si è detto sui tre medi e conoscere le loro differenze ed i procedimenti con cui si trovano [come si era detto nella sezione "Secondo dono del Dio al Cosmo: legame e proporzione" - proporzione aritmetica: come dirà Platone stesso (36a), questo medio proporzionale è quello che supera un estremo di una quantità numerica uguale a quella da cui è superato dall'altro estremo – la serie che si forma è 1,2,3; proporzione geometrica: il prodotto del primo e dell'ultimo termine è uguale al prodotto dei medi – la serie che si forma è 1,2,4; proporzione armonica, secondo la stessa definizione di Platone (36a) è quella che supera un estremo ed è superata dall'altro estremo dalla medesima frazione degli estremi – la serie che si forma è 3.4,6]. La media aritmetica è quella il cui medio supera un estremo di una quantità numerica uguale a quella da cui è superato dall'altro estremo; così ogni numero nella serie può diventare termine medio di una media aritmetica, come dice del resto Timeo stesso. Si chiama armonica quella media in cui il termine medio è superato dal termine superiore per una certa parte del termine superiore, e supera il termine inferiore per la stessa parte del termine inferiore; i tre numeri 6,4,3 formano così una media armonica (3:4=4:6) perché 4 è maggiore di 3 per un terzo di 3 (ossia 1/3 di 3=1>3+1=4), e 4 è minore di 6 per un terzo di 6 (ossia 1/3 di 6=2> 4+2=6). Si chiama geometrica la media in cui il termine maggiore ha con il medio lo stesso rapporto che il medio ha con il termine minore. Indichiamo ora i metodi per trovare questi medi. Dati due termini estremi, siano da cercare la media aritmetica e la media armonica fra questi estremi, e che questi estremi abbiano il rapporto di 2, come i numeri 12 e 6; si prenda poi il numero per cui il termine maggiore supera il minore, in questo caso 6; si divida poi questo eccesso, il 6, per 2, e si aggiunga il risultato, 3, al termine inferiore, 6, il che dà il medio ricercato ossia 9: pertanto, fra 6 e 12 il medio è 9 nella media aritmetica (6:9=9:12), perché il numero 3 segna l'eccesso del termine maggiore sul medio e quello del medio sul termine minore. Si prenda di nuovo la differenza fra i due termini estremi, 6, e la si moltiplichi per il termine minore, quindi 6 x 6=36; si applichi questo prodotto, sotto forma di rettangolo, dei termini estremi, ossia 12+6=18 – si otterrà il 2 come larghezza del rettangolo applicato (36:18=2); aggiungendo il 2 al termine minore 6, si otterrà 8 come medio armonico (6:8=8:12), perché l'8 è superato dal termine maggiore per una certa frazione di questo stesso termine, e supera il termine minore per una certa frazione di questo stesso termine: è infatti superato dal 12 per un terzo di 12 (1/3 di 12 è 4> 8+4=12), e supera il 6 per un terzo di 6 (1/3 di 6 è 2> 6+2=8). Consideriamo ora due numeri in cui il maggiore sia il triplo del minore, 18 e 6: la loro somma dà 24, la cui metà dà il termine medio fra 18 e 6 secondo la media aritmetica (6:12=12:18); si prenda poi la differenza fra gli estremi, ossia 12 – si moltiplichi 12 con il termine minore, quindi 12 x 6=72 – si divida poi questo numero, 72, per la somma dei due estremi, 24, quindi 72: 24=3 – si aggiunga così il 3 al termine minore 6 e si avrà 9, la media armonica fra 6 e 18 (6:9=9:18). Si ha in effetti 18 – 9=9, 9 – 6=3, e di queste due differenze, la prima, 9, è la metà del termine maggiore, e la seconda, 3, è la metà del termine minore 6. Stesso procedimento se i termini estremi sono 1 e 2: sommando i due termini e prendendo la metà del risultato, si avrà 1 ½ come termine medio della media aritmetica; si prenda poi il numero per cui il maggiore supera il minore, ossia 1, e si moltiplichi questo numero per il termine minore, si avrà come risultato di 1 x 1=1 – dividendo questo prodotto, 1, per la somma dei termini estremi, 3, si ottiene 1/3 – aggiungendo questo 1/3 all'unità, si ottiene 4/3, il termine medio della media armonica fra 1 e 2. In tal modo, servendoci di questi metodi, arriveremo a colmare in modo sistematico tutti gli intervalli delle due progressioni (1,2,4,8 e 1,3,9,27) con le medie aritmetiche ed armoniche, termini medi che il *Timeo* ricomprenderà nella media geometrica e, così facendo, amplificherà quest'ultima con l'inserimento di altre medie. In modo generale, poiché il *Timeo* menziona tre medie, fra cui quella geometrica è quella che ricomprende le altre due, aggiungiamo a quel che poi diremo un teorema di questo genere: se, in una proporzione discontinua, uno dei due termini medi forma la media aritmetica fra i due termini estremi, l'altro termine medio formerà la media armonica fra gli estremi, e questo reciprocamente. Si diano infatti quattro termini, A, B, Γ, Δ, tali che A sta a B, come Γ sta a Δ, e sia B il medio aritmetico fra A e Δ; ebbene, Γ ne è il medio armonico. Infatti, per il fatto che il prodotto AΔ è uguale al prodotto BΓ, e che B è il medio aritmetico fra A e Δ, il prodotto della somma A+Δ per Γ sarà uguale al doppio del prodotto BΓ, perché, in virtù della media aritmetica, la somma A+Δ è uguale al doppio di B; il prodotto di Γ per la somma A+Δ sarà dunque uguale al doppio del prodotto AΔ. Ebbene, questa relazione, in cui il prodotto della somma dei termini estremi per il termine medio è uguale al doppio prodotto dei termini estremi, era ciò che precisamente caratterizzava la media armonica. E' vero anche il reciproco: sia in effetti Γ la media armonica fra A e Δ, ebbene, B è la media aritmetica fra A e Δ. Infatti, poiché il prodotto della somma A+Δ per Γ è uguale al doppio prodotto AΔ, e d'altra parte, i prodotti AΔ e BΓ sono uguali, il prodotto della somma A+Δ per Γ è uguale al doppio prodotto BΓ; la somma A+Δ è quindi uguale a 2B. Ebbene, la media aritmetica era esattamente quella in cui la somma degli estremi è uguale al doppio del termine medio. Inoltre, sia, di quei quattro termini, A,B,Γ,Δ, B il medio aritmetico fra A e Δ, e Γ il medio armonico fra A e Δ: in tali condizioni, A sta a B, come Γ sta a Δ. Infatti, poiché il prodotto di Γ per la somma A+Δ è uguale al doppio prodotto AΔ secondo la definizione di media armonica, e d'altra parte, lo stesso prodotto di Γ per la somma A+Δ è uguale al doppio prodotto BΓ secondo la media aritmetica, i due prodotti AΔ e BΓ sono uguali – ne consegue che A sta a B, come Γ sta a Δ, e questa relazione caratterizza la media geometrica. Quindi le due medie, aritmetica ed armonica, sono comprese nella media geometrica e reciproche l'una rispetto l'altra. Dopo aver aggiunto queste spiegazioni di base, intraprendiamo l'impresa che ci siamo proposti.

μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν¸ μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης¸ τὴν δ΄ αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας¸ τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης “Prima tolse dal tutto una parte, poi dopo di questa tolse una parte doppia della prima, ne tolse quindi una terza, emiolio della seconda, ma tripla rispetto alla prima”

I – Spiegazione matematica: non bisogna escludere del tutto la speculazione matematica, ma nemmeno ricercarla di per se stessa come unico modo di spiegazione. Infatti, da un lato essa ci fa vedere, come desidera Platone, la Realtà Intelligibile nelle immagini, d'altro lato però introduce un elemento di disequilibrio in tutta la spiegazione, dal momento che la realtà delle cose che sono oggetto della ricerca, devono appoggiarsi ad un'ancora saldamente assicurata. Come si era detto in precedenza, Platone pone quindi la discussione su un livello intermedio – pertanto, seguendolo anche in ciò, dapprima cercheremo di spiegare il passo in modo matematico, e poi in modo conforme alla natura dei temi trattati. In realtà, i Pitagorici sono fieri di aver per così dire inventato le suddivisioni del canone musicale; però, ciò che Platone ci tramanda in questi passi sono le divisioni dell'Anima, e lo fa svelando le loro Cause essenziali ed i ragionamenti generatori di teoremi matematici. Perciò, come anticipato, andremo ad esercitare la comprensione dei lettori in primo luogo con l'analisi dei problemi matematici, riunendo ciò che si trova presso molti autori, lasciando da parte le contestazioni e cercando la verità di per se stessa. Tratteremo, per riassumere l'oggetto del discorso, questi cinque punti: le ragioni delle progressioni geometriche, i medi che si situano fra i termini di una serie geometrica, i rapporti di 4 a 3 e di 3 a 2 che appaiono nei medi, i rapporti di 9 a 8 che colmano questi intervalli, l'intervallo supplementare – poiché è necessario che la tavola dei numeri comprenda tutti questi rapporti e sia da essi consolidata. Procediamo quindi con ordine, e per prima cosa consideriamo i numeri derivati dall'unità, quelli che Platone considera rapporti primari: poniamo quindi l'unità; il 2 doppio dell'unità; il 3, che vale una volta e mezzo il 2, e tre volte l'unità; il 4, doppio di 2; il 9, triplo di 3; l'8 che vale otto volte l'unità; infine, il 27, che vale ventisette volte l'unità (ossia: dopo la monade, si alternano le serie pari e dispari, facendo seguire i numeri lineari, 2 e 3, poi i quadrati, 4 e 9, e poi i cubici, 8 e 27 – si ha così, lo ripetiamo per tenerla sempre a mente, la serie progressiva 1,2,3,4,9,8,27). Ebbene, come si era detto, alcuni dispongono questi numeri in forma di Lambda, ponendo l'unità sulla sommità e facendo discendere da un lato e dall'altro la serie che fa capo al 2 e quella che fa capo al 3; altri, più fedeli al pensiero di Platone, li dispongono su una linea retta, perché di fatto Platone non ha separato le due serie, quella del 2 e quella del 3, al contrario è avanzato in linea retta, prendendo di volta in volta un termine da una serie e uno dall'altra. Ebbene, se Platone si fosse fermato qui, sarebbe inutile spingere più in là la nostra spiegazione – però è proprio lui a spingerci a legare gli intervalli delle due serie per mezzo di medi armonici ed aritmetici, e siccome è impossibile trovare questi medi per l'intervallo situato fra 1 e 2 (la contraddizione con il passo precedente, in cui si erano effettivamente valutati i medi fra 1 e 2, è apparente: come spiegherà Proclo stesso poco oltre, si tratta qui di evitare le frazioni), conviene prendere un primo numero che, pur essendo il più piccolo (delle due serie geometriche), ammetta una metà e un terzo – ogni numero infatti ammette un numero doppio. E' quindi così che dobbiamo svolgere la ricerca: prendiamo quindi il numero 6, il cui doppio è 12, 6 e 12 essendo nello stesso rapporto di 1 rispetto a 2. Se noi inseriamo, nell'intervallo compreso fra questi sestupli di 1 e 2, dei termini medi, i numeri 8 e 9 daranno le medie indicate – infatti, l'8 è separato dai due termini estremi da dei numeri che sono la medesima frazione, l'uno del termine minore e l'altro del termine maggiore, ed il 9 è equidistante da 6 e da 12; moltiplicando per 6 sia l'unità che il numero 2, troviamo numeri suscettibili di appartenere alle medie indicate. Così, moltiplicando per 6 tutti gli altri numeri che appartengono alla sequenza, delle due serie del 2 e del 3, troveremo dei termini fra cui potremo inserire delle medie aritmetiche ed armoniche. Si moltiplichi quindi tutta la serie menzionata per 6, con i seguenti prodotti: 6,12,18,24,48,54,162. In questa serie abbiamo posto i numeri nell'ordine indicato da Platone, salvo che per il 54, che avremmo dovuto mettere prima del 48 – perché è il 9, triplo di 3, che Platone nomina prima dell'8 – mentre abbiamo posto prima il 48, seguendo l'ordine crescente dei numeri rispetto all'ordine che Platone ha mostrato seguendo la progressione geometrica dei numeri, alternando un termine della serie del 2 con uno della serie del 3. Pertanto, data la serie sopramenzionata: fra 6 e 12 abbiamo 8 e 9; fra 12 ed il doppio di questo numero, 24, il medio armonico è 16, il medio aritmetico 18; fra il terzo termine della serie del 2, ossia 24, e quello successivo, 48, il medio armonico è 32 e quello aritmetico 36; nella serie del 3, fra 6 e 18, che è il primo termine ottenuto con la moltiplicazione per 3, il medio armonico è 9 e quello aritmetico 12; fra il 18 ed il 54, secondo termine ottenuto con la moltiplicazione per 3, il medio armonico è 27 e quello aritmetico 36; fra 54 e 162, il medio armonico è 81 e quello aritmetico 108. Abbiamo così diviso gli intervalli delle serie del 2 e del 3 con questi due medi, in modo che i termini di queste serie ed i termini che marcano queste suddivisioni, disposte in ordine di grandezza, saranno: 6,8,9,12,16,18,24,27,32,36,48,54,81,108,162. Se fosse possibile, negli intervalli di cui stiamo esponendo la generazione, scomporre i rapporti di 4 a 3 in modo da ottenere i rapporti di 9 a 8 ed i leimmata, allora ci fermeremmo lì – non essendo ciò possibile, bisognerà ricorrere ad un altro metodo. S dovrà prendere la base della serie che dipende dal 2, di modo che si possa formarne due rapporti di 9 a 8 e, in più, un rapporto di 4 a 3. Prendiamo quindi il terzo termine, a partire dall'unità, della progressione geometrica che dipende dall'8, ossia 64: da questo numero si possono derivare in successione due rapporti di 9 a 8. Infatti, ogni termine di una progressione geometrica può dare luogo ad un numero di rapporti, espressi con la somma dell'unità e di una frazione avente numeratore 1 ed il denominatore uguale alla base della progressione, che indica il suo rango nella progressione stessa a partire dall'unità (ossia, si può prendere due volte successivamente il tono, 9/8, di 64 senza abbandonare il dominio dei numeri interi perché 64 è il terzo termine della progressione geometrica a base 8), ma non è qui possibile formare il rapporto di 4 a 3. Di conseguenza, triplicando il numero 64 si ottiene 192, di cui i quattro terzi sono 256, i nove ottavi 216, ed i nove ottavi di quest'ultimo 243. Il rapporto del leimma è perciò ciò che resta dopo la derivazione successiva dei due rapporti di 9 a 8, ossia il rapporto 256 a 243 (infatti: $(4/3) / (9/8)^2 = 4/3 \cdot (8/9)^2 = 4 \cdot 64 / 3 \cdot 81 = 256/ 243$). Infatti, ogni intervallo di quattro terzi lascia come resto, quando se ne separa l'intervallo ottenuto prendendone successivamente due volte i nove ottavi, un intervallo avente il rapporto del leimma. Ebbene, di 256 i nove ottavi sono sono 288, numero che salva la media aritmetica, essendo posto a metà strada fra il numero 192 ed il 384, essendo quest'ultimo il doppio di 192 ed i quattro terzi di 288. Se fosse possibile derivare due volte successivamente i nove ottavi di 288, colmeremmo così questo intervallo di quattro terzi con i rapporti di nove ottavi ed il leimma – ma ciò non è possibile: in effetti, i nove ottavi di 288, ossia

324, non sono divisibili per 8, e per questa ragione non se ne può formare un rapporto di nove a otto se si vuole conservare il principio di non spezzare l'unità in frazioni; di fatto, invece, l'ottava parte di 324 è 40 ½. Dunque, raddoppiando 324, per far sparire la frazione ½, potremmo prendere i nove ottavi anche del risultato di questa moltiplicazione per 2 – però, questo procedimento ci obbligherà a moltiplicare per 2 anche tutti i termini situati prima e dopo 324. Dunque, rimpiazzeremo 192 con 384, 216 con 432, 243 con 486, 256 con 512, 288 con 576; i nove ottavi di quest'ultimo numero, 576, sono 648, ed i nove ottavi di 648 sono 729; prendiamo quindi 768, doppio di 384 ed avente con 729 il rapporto del leimma. Così dunque gli intervalli della serie di base 2 si troveranno colmati da intervalli con i rapporti di 3/2, 4/3 e 9/8 (accordo di quinta, quarta e tono) per mezzo dei seguenti numeri: 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, 768. Se dunque vogliamo colmare tutta la sequenza degli intervalli, ponendo successivamente come base il numero 384; come doppio di questa base 768; come triplo della base e 3/2 del secondo numero 1152; come quadruplo della base 1536; come quinto numero, triplo del terzo, 3456; come sesto numero, ottuplo del primo, 3072; come settimo numero, prodotto del primo per 27, 10.368; con delle medie armoniche ed aritmetiche, che producano con il loro inserimento gli intervalli aventi i rapporti di 3/2 e 4/3, vi sarà fra 384 ed il suo doppio 768 il numero 512 come medio armonico, e 576 come medio aritmetico. Se consideriamo i medi per l'intervallo triplice, ossia fra 384 e 1152, il numero 576, che nell'intervallo doppio era medio aritmetico, sarà qui medio armonico, mentre 768, termine maggiore dell'intervallo doppio, è qui il medio aritmetico. Se inoltre vogliamo considerare i medi compresi nell'intervallo compreso fra il doppio ed il quadruplo, fra 768 e 1536, il numero 1024 sarà medio armonico e 1152 medio aritmetico. Se vogliamo così colmare anche il secondo intervallo triplo, fra 1152 e 3456, il numero 1728 darà il medio armonico e 2304 il medio aritmetico. Se inoltre cerchiamo di colmare anche il terzo intervallo doppio compreso fra 1536 e 3072, il numero 2048 sarà il medio armonico e 2034 il medio aritmetico. Se inoltre cerchiamo di colmare con gli stessi medi il terzo intervallo triplice, ossia l'intervallo limitato dal quinto e settimo numero della serie, ossia 3456 e 10.368, avremo come medio armonico 5184 e come medio aritmetico 6912. Se, d'altra parte, colmiamo in tal modo ciascuno degli intervalli di rapporto 4 a 3 e 3 a 2, che questi medi fanno apparire, per mezzo del rapporto di 9 a 8 e del leimma (un tono e un semitono), tutta la serie degli intervalli limitati dai termini successivi ammetterà, dopo un dispiegamento completo, 24 rapporti di 9 a 8 e nove leimmata (24 toni e 9 semitoni).

Avendo chiarito questi punti, è importante sapere, a proposito del leimma, quanto segue: nessun rapporto di forma n+1 / n può essere scomposto in rapporti uguali, ed è impossibile esprimere il semitono con il rapporto di due numeri interi (l'espressione √n+1 / n non può corrispondere ad una frazione razionale poiché, di due numeri n e n+1 solo uno dei due può essere un quadrato. Così, nel rapporto del tono 9/8, solo il numeratore è un quadrato; il rapporto del semitono, $\sqrt{9/8} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$, è dunque irrazionale). Si prendano allora i rapporti vicini 18/17 e 17/16 (ossia, si scomponga il 9/8 in due fattori razionali ineguali ma vicini: 9/8= 18/17 x 17/16) e, mostrando che il rapporto 18/17, che è inferiore all'esatto rapporto del semitono, è superiore al rapporto chiamato leimma, se ne conclude che necessariamente il rapporto del leimma è un po' inferiore al semitono. Che il leimma sia inferiore a 18/17 e 18/17 inferiore al semitono, ecco come lo si dimostra: si diano i numeri 16, i nove ottavi di 16, e 18; posto fra 16 e 18, il 17 scompone l'intervallo, di proporzione 9/8, fra 16 e 18 in due rapporti disuguali vicini con il rapporto del semitono, e differisce di un'unità rispetto a ciascuno dei termini estremi. Inoltre, è evidente che 17 forma con il limite inferiore 16 dell'intervallo 16-18 un rapporto più grande di quello che il limite superiore forma con il 17. Infatti, in ogni media aritmetica, il rapporto del termine medio con il più piccolo degli estremi, è sempre il rapporto più grande (per esteso: in ogni media aritmetica, il rapporto del termine medio con il termine estremo più piccolo è superiore al rapporto del termine estremo maggiore con il medio), e così 18/17 è inferiore al rapporto del semitono. Però, a sua volta il leimma è inferiore a 18/17, come risulta dai limiti che si trovano nei testi stessi di Platone. Inoltre, il numero 256, che è con il 243 nel rapporto del leimma (ricordiamo che la quarta è un intervallo che comprende due toni ed un leimma, infatti, come avevamo mostrato poco sopra: $(4/3) / (9/8)^2 = 4/3 \,.\, (8/9)^2 = 4 \,.\, 64 / 3 \,.\, 81 = 256/ 243$), come dimostreremo facendo vedere che, espresso con questi numeri, il rapporto del leimma è una frazione irriducibile, forma con 243 un rapporto inferiore ai 18/17 di 243 – infatti, 256 non supera il 243 che di tredici unità, mentre la diciassettesima parte di 243 è superiore a 13. A maggior ragione quindi il rapporto del leimma è inferiore al rapporto del semitono, di modo che il rapporto complementare del leimma, l'apotome o 'taglio', è necessariamente superiore a quello del semitono (ossia, il tono è un intervallo comprendente un leimma e un'apotome – letteralmente, 'tagliato via': il leimma è un po' più piccolo del semitono, quindi la differenza fra il tono e il semitono giusto è l'apotome, detto anche 'semitono maggiore' – quindi, tono= (leimma) x (apotome) ossia: 9/8= 356/243 x apotome, dal che: apotome= 9/8 x 243/256= 2187/2048). Si può dimostrare ciò anche nel modo seguente: si diano i numeri 256 e 243 – formiamo una proporzione continua di tre termini con il rapporto di 256 a 243. Il quadrato di 256 è 65.536, ed il quadrato di 243 è 59.049. il prodotto di 256 x 243 è 62.208. Questi tre numeri, 65.536 – 62.208 – 59.049, formano una proporzione continua nel rapporto del leimma (si ha la proporzione continua 65.536/ 62.208 = 62.208/59.049; relazione che si può trascrivere $256^2 / 256 \times 243 = 256 \times 243 / 243^2$, ed i due membri di questa proporzione sono uguali al rapporto del leimma 256/243). Pertanto, se questo rapporto del leimma è quello del semitono, allora il rapporto fra i termini estremi della proporzione indicata sarà quello del tono; se è superiore a quello del semitono, a sua volta il rapporto fra gli estremi sarà superiore a quello del tono; se è inferiore a quello del semitono, il rapporto fra gli estremi sarà inferiore a quello del tono. Ma, in realtà, i nove ottavi di 59.049 sono 66.430 1/8, numero più grande rispetto al limite superiore dell'intervallo 59.049 – 65. 536. Si può dimostrare anche con un terzo metodo che il rapporto del tono non può essere diviso in due rapporti uguali di numeri essendo fra loro come 256 a 243: infatti, se prendiamo l'ottava parte di 243, abbiamo 30+1/4+1/8, e aggiungiamo questo quoziente a 243, otterremo 273+1/4+1/8, e questo numero sta a 243 come 9 sta ad 8; però si vede che il rapporto di 256 con 243 è inferiore a quello di 273+1/4+1/8 con 256; infatti il rapporto di 256 a 243 è uguale ad un intero seguito da una frazione il cui numeratore, differente di un'unità, è inferiore al denominatore, sia 13/243, mentre il rapporto di 273+1/4+1/8 a 256 è uguale all'unità aumentata della frazione (17+1/4+1/8) / 256; ora, l'eccedente 17+1/4+1/8 ha la meglio sull'eccedente 13 nel rapporto degli eccedenti (ossia: delle due frazioni 17/256 e 13/243, la più grande è la prima perché, ridotte allo stesso denominatore, si scrivono: 4131/62.208 e 3328/62.208 e ovviamente 4131>3328. Inoltre, visto che 17/256 > 13/243, a maggior ragione: (17+1/4+1/8) / 256 > 13/243). Pertanto, l'intervallo del tono non si divide in due intervalli uguali, bensì uno dei due componenti è il leimma, chiamato così anche da Platone stesso, e l'altro componente, espresso da un rapporto superiore a quello del leimma, è l'apotome, il 'taglio', come hanno l'abitudine di designarlo i teorici della musica. Si dia infatti il numero 273+1/4+1/8, che è con il 243 nel rapporto di 9 a 8; e il numero 258+1/8+1/16, che è con lo stesso numero, 243, nel rapporto di 17 a 16; ed il numero 256 che forma con il 243 il rapporto del leimma, inferiore al rapporto 18/17. E' evidente che il numero 273+1/4+1/8, che con il 243 forma il rapporto del tono (9 a 8), avrà con il 256 il rapporto complementare del leimma, ossia l'apotome, che è più grande rispetto al rapporto 18/17, a cui il rapporto del leimma è inferiore. Se moltiplichiamo tutti questi numeri per 8, troveremo la prima espressione del rapporto dell'apotome in numeri interi: infatti 243x8=1944; 256x8=2048; 273+1/4+1/8x8=2187. Così, il rapporto dell'apotome ridotto alla sua più semplice espressione è uguale al rapporto fra 2187 e 2048, e vedremo che avremo bisogno di questi numeri nella lista dei termini successivi. Infatti, dati i numeri 243, 256, 273+1/4+1/8, li abbiamo moltiplicati per 8 a causa delle frazioni ¼ e 1/8, perché gli intervalli fossero espressi in numeri interi e senza frazioni – abbiamo così ottenuto 1944, 2048 e 2187. Che inoltre il rapporto del leimma sia necessariamente quello che c'è fra 256 e 243, lo dimostreremo anche nel modo seguente: se si divide un intervallo di rapporto 4 a 3 due volte successivamente con il rapporto 9 a 8, i termini che limitano l'intervallo ottenuto con questa operazione hanno fra loro il rapporto 256 a 243. Sia in effetti AB un intervallo uguale ai quattro terzi di E; sia Γ uguale ai nove ottavi di AB, e Δ uguale ai nove ottavi di Γ – ebbene, Δ sta a E come 256 sta a 243. In effetti, dividiamo l'intervallo AB con un intervallo ZB uguale a Γ, e con un altro intervallo, HB, uguale a Δ. Poiché AB sta a Γ come Γ sta a Δ, ossia come 9 sta ad 8, AB starà a BZ come BZ sta BH. La differenza AB-BZ starà dunque alla differenza BZ-BH come AB sta a BZ; si avrà quindi che AZ sta a ZH come AB sta a BZ; ma, visto che AB sta a

BZ come 9 sta ad 8, allora AZ sarà uguale ai nove ottavi di ZH. Prendiamo quindi un intervallo ZΘ uguale a ZH; AZ sarà dunque uguale ai nove ottavi di ZΘ, e ZΘ sarà l'ottuplo di ΘA; ma essendo ZΘ e ZH uguali, la loro somma HΘ sarà uguale al prodotto di ΘA per 16. D'altra parte, ZB= 9/8 di BH (perché, per ipotesi, Γ= 9/8 Δ), e di conseguenza BH è l'ottuplo di HZ. Ebbene, l'intervallo ZH contiene 8 unità, quello HB ne contiene 64, e ZB 72 – 72 è infatti uguale ai nove ottavi di 64. L'intervallo intero AB contiene 81 unità, numero uguale ai nove ottavi di 72. Moltiplichiamo ora questi numeri per 4: AB contiene così 324 unità, l'intervallo BH, ossia Δ, ne conterrà 256 – infatti 324 è il quadruplo di 81 e 256 il quadruplo di 64. Ora, i numeri che sono gli stessi multipli di fattori differenti hanno fra loro il rapporto di questi fattori. Dunque, visto che AB è uguale ai quattro terzi di E, AB contenendo 324 unità, E ne conterrà 243; AB contiene di fatto la somma di 243 e di un terzo di 243 che è 81. Però, abbiamo anche trovato che Δ sta ad AB come 256 a 324; Δ dunque sta ad E come 256 a 243. E' evidente che questi numeri sono i più piccoli fra quelli per mezzo dei quali si può esprimere il rapporto del leimma – sono in effetti primi fra loro, come dimostra la sottrazione reciproca: è in effetti l'unità che è l'ultimo divisore comune quando si sottrae sempre reciprocamente il numero più piccolo, o i suoi multipli, dal più grande (procedimento della 'sottrazione reciproca', ossia il procedimento di ricerca della più grande misura comune fra due numeri, cf. prime proposizioni dell'ottavo libro degli *Elementi* di Euclide. In sintesi, questo procedimento consiste nel dividere il maggiore dei due numeri per il più piccolo, e quest'ultimo per il resto della prima divisione, e questo primo resto per il resto della seconda divisione, e così di seguito; l'ultimo resto è il maggiore comune divisore cercato, e se questo ultimo resto è 1, i due numeri sono primi fra loro). Però, se 256 e 243 sono primi fra loro, è chiaro che sono i numeri più piccoli fra i numeri che hanno lo stesso loro rapporto. Se dunque dividiamo l'intervallo di rapporto 4/3 due volte successivamente per il rapporto di 9/8, i limiti dell'intervallo ottenuto con questa divisione hanno fra loro il rapporto di 256 a 243.

Dimostrata questa proposizione, prendiamo ora l'intervallo AB corrispondente al rapporto del tono, poi ΓB corrispondente al rapporto del leimma, ed infine AΔ corrispondente al rapporto di quel che chiamiamo semitono. E' evidente che AΓ corrisponde al rapporto dell'apotome, che è maggiore di quello del semitono, mentre l'intervallo fra Δ e Γ è quello del 'comma': si chiama 'comma' il rapporto dell'apotome rispetto al semitono esatto, che è impossibile da esprimere razionalmente come si era dimostrato. Aggiungiamo inoltre che se abbiamo chiamato il rapporto di ΔB semitono, non è perché il rapporto 9/8 sarà diviso in due rapporti uguali fra loro; nessuna frazione infatti, il cui numeratore supera di un'unità il denominatore, è suscettibile di essere 'tagliata' in due rapporti uguali. Però, visto che i partigiani di Aristosseno hanno fissato il semitono secondo le due operazioni sul rapporto di 9 a 8, abbiamo preso il rapporto del semitono come abbiamo spiegato, secondo la loro definizione, per poter trovare quali sono i rapporti del comma e dell'apotome rispetto al leimma. Abbiamo aggiunto questa considerazione perché la proposizione secondo cui nessuna frazione, il cui numeratore supera di un'unità il denominatore, può essere divisa in due frazioni razionali uguali, fa parte delle dimostrazioni già acquisite. Conviene anche aggiungere, per questioni di eleganza, una seconda considerazione: i Pitagorici hanno preteso che non esista il semitono, in base a cui l'intervallo di quarta, 4/3, comprende due toni di rapporto 9/8, e che l'ottava con la quarta non formi un accordo, e la scuola di Aristosseno si è conformata a questa teoria. Però, fra i teorici della scienza armonica dopo Aristosseno, i seguaci di Tolomeo hanno ammesso la prima fra queste due proposizioni dei Pitagorici, quella secondo cui il cosiddetto semitono non è realmente un semitono, ma hanno rigettato la seconda proposizione ed hanno quindi posto che quarta e ottava costituiscono un accordo. Quanto a noi, abbiamo presentato una dimostrazione resa necessaria dalla frase formulata da Platone, ma rinunciamo qui ad una dimostrazione della seconda proposizione, da cui siamo dispensati grazie al silenzio di Platone stesso a tal proposito.

Dopo aver trovato quale sia l'espressione, in numeri primi fra loro, dei rapporti del leimma e dell'apotome, bisogna ora dire quali sono i numeri primi fra loro con cui si esprime il comma, ossia l'intervallo che separa il leimma dall'apotome. Il rapporto del comma espresso in numeri interi è, come dicono gli Antichi, quello di 531.441 a 524.288 (ecco come si arriva a questi numeri: leimma= 256/243; apotome= tono/leimma = 9/8 : 256/243 = 9/8 x 243/256; comma= apotome/leimma = 9/8 x 243/256 : 256/243 = 9/8 x 243^2 / 256^2 = 9 x 59.049 / 8 x 65.536 = 531.441 / 524.288). Se non si teme l'uso delle frazioni, si dia il rapporto del leimma espresso dal rapporto di 256 a 243; si diano i nove ottavi di 243 che sono 273+1/4+1/8; si dia infine un altro leimma, quello di 256, ed esso ha il valore di 269+13 x 13/243, perché tale è in effetti il rapporto del leimma. Ora, il numero indicato, 269+13 x 13/243, è la somma di 256+13+13 x 13/243, Però, visto che 256 è la somma di 243 e di 13, essendo il 13 i 13/243 di 243, è evidente che il numero 269+13 x 13/243 contiene il 13, per cui supera 256, di 243 contenuto in 256, questo 13 essendo i 13/243 di 243, e contiene di ciascuna delle unità del 13, per cui il 256 supera il 243, i 13 x 13/243 che rimangono. Il rapporto della somma 269+13 x 13/243 rispetto alla somma 243+13=256 è dunque lo stesso rispetto a quello di 256 a 243, poiché il numero 256 forma con il 243 un rapporto espresso dalla somma dell'unità e di una frazione il cui numeratore differisca di uno, e perché contiene 13/243 di 243 e 243 unità. Ne segue che il quoziente del numero 273+1/4+1/8 rispetto al numero 269+13 x 13/243 è uguale al rapporto del comma. Si sono così trovati quali sono i numeri frazionari più piccoli che esprimono, dopo la divisione del tono, 9/8, con il quadrato del leimma, il rapporto del comma (di fatto, dalle due relazioni: apotome= tono/leimma; comma= apotome/leimma; si ha la relazione: comma= tono/ leimma^2). Da quel che si è detto, risulta evidente che abbiamo completato il compito che ci eravamo proposti: infatti, tutti gli intervalli fra i termini dati sono stati colmati con i medi armonici ed aritmetici, e la scomposizione degli intervalli di rapporto 3/2 e 4/3 in intervalli di 9/8 ed in leimmata è stata compiuta. Nell'intervallo, di rapporto 2 a 1, limitato da 384 e 768, si trovano intercalati i numeri 432, nove ottavi di 384; 486, nove ottavi di 432; 512, leimma di 486; questo numero 512 segna i 4/3 di 384, questo rapporto essendo il prodotto del quadrato del tono per il leimma. Inoltre, il numero 512 ammette come tono, 9/8, il numero 576 di cui, a sua volta, il tono è 648, di cui il tono è 729, di cui il leimma è 768. Nello stesso tempo, l'intervallo di rapporto 3/2, che è il prodotto del cubo del tono per il leimma, si trova colmato da questi termini (secondo le definizioni di tono e di leimma, si ha infatti: $(\text{tono})^3$ x (leimma) = $[(9/8)^3$ x $4/3] / (9/8)^2 = 9/8$ x $4/3 = 3/2$ – la quinta comprende quindi tre toni ed un leimma), e nello stesso modo tutto l'intervallo di rapporto 2 a 1, prodotto della quinta potenza del tono per il quadrato del leimma (nello stesso modo di prima: il tono elevato alla quinta, moltiplicato per il leimma al quadrato dà, riducendo secondo lo stesso procedimento di prima: 9/8 x 16/9= 2/1 – pertanto l'ottava comprende cinque toni e due leimmata). Inoltre, fra i termini estremi 384 e 768, il numero 512 è il medio armonico, 576 il medio aritmetico. Inoltre, l'intervallo 768 ammette come tono 864, di cui il tono è 972, ed il leimma di 972 è 1024 (da quel che si è detto, il leimma di 972 è: 768 x $(9/8)^2$ x 4/3 x $(8/9)^2$ = 768 x 4/3 = 1024), e il tono di 1024 è 1152. In più, il prodotto fra i rapporti 3/2 e 2/1 è uguale al rapporto 3/1 che hanno fra loro i numeri 1152 e 384; nell'intervallo compreso fra questi due termini in rapporto 3/1 il numero 576 è il medio armonico e 768 il medio aritmetico. Si è infatti dimostrato il seguente teorema generale: due numeri, essendo uno il doppio e l'altro il triplo di uno stesso termine, se si prende nell'intervallo di rapporto 2/1 il medio aritmetico, il numero così ottenuto è medio armonico nell'intervallo di rapporto 3/1, ed il termine maggiore dell'intervallo 2/1 è medio aritmetico nell'intervallo di rapporto 3/1. Così, fra i numeri menzionati, il doppio di 384 è 768, il triplo di 384 è 1152; si è preso, nell'intervallo 384-768 il medio aritmetico 576; si è visto che questo stesso numero è medio armonico nell'intervallo 384-1152; ed il termine 768 dell'intervallo doppio 384-768 appariva nell'intervallo triplo come medio aritmetico. In seguito a questi termini, 1152 ammette come tono 1296, il tono di 1296 essendo 1458, di cui il leimma è 1536. Si completa così il ricolmare il doppio intervallo di rapporto 2/1, che è il prodotto dei rapporti 3/2 e 4/3, che ammette come termini estremi 768 e 1536, che è diviso in cinque toni e due leimmata, essendo 1024 la sua media armonica e 1152 la sua media aritmetica. D'altra parte, il tono di 1536 è 1728, il tono di 1728 è 1944, il tono di 1944 è 2187, il leimma di 2187 è 2048, il tono di 2048 è 2304, il tono di 2304 è 2592, il tono di 2592 è 2916, il leimma di 2916 è 3072, numero che è l'ottuplo del primo termine (384) della nostra serie e colma così il terzo intervallo di rapporto 2/1. Quindi, il tono di 3072 è il numero 3456 che marca il limite del secondo intervallo di rapporto 3 avente per termini estremi questo 3456 e 1152. Questo intervallo ha come media armonica 1728 e come media aritmetica 2304. Inoltre, il tono 3456 è 3888, di cui il tono è 4374 ed il leimma 4096; il tono di 4096 è 4608, il tono di 4608 è 5184, il tono di 5184 è 5832, il leimma di 5832 è 6144, il tono di 6144 è 6912. E la scala continua nel seguito dei tre intervalli di cui stiamo trattando, poiché nel terzo intervallo di rapporto 3/1, vi è tutta la scala dei cinque suoni, incluso il rapporto 2/1. In effetti, il numero 6912 ammette come tono 7776, il tono di 7776 è 8748, il leimma di 8748 è 9216, il tono di 9216 è 10.368 – ed è fino a qui che si estende il terzo intervallo di rapporto 3/1. I suoi limiti sono 3456 e 10.368, il suo medio armonico è 5184, il suo medio aritmetico è 6912. La serie degli intervalli di rapporto 2/1 e 3/1 è dunque colmata dai medi, dai toni e dai leimmata, e questa scala comprende nella sua totalità 9 leimmata e 24 toni; negli intervalli infatti uno dei limiti non è contato: la scala totale si estende così a 4 ottave, aumentata da una quinta e da un tono. Come si era detto in precedenza, Adrasto dispone assai abilmente la serie numerica proposta da Platone a forma di Λ, e mette i termini sui tre triangoli, ponendo sul triangolo inferiore i rapporti espressi dai numeri a partire dall'unità, , sul triangolo successivo i rapporti scritti in sestupli rispetto ai primi, i quali ammettono in ciascuno degli intervalli che delimitano, sia nella progressione a base 2 sia in quella a base 3, due medie espresse in numeri interi, ed infine, sul triangolo più esterno, i rapporti che compongono la serie indicata. Si può fare uno schizzo di tale metodo, ma tenendo presente che Adrasto inscrive nella sua figura fra i termini delle due progressioni di base 2 e 3, anche tutti i numeri che appaiono nelle spiegazioni precedenti, mentre noi giudichiamo che sia inutile aggiungerli agli altri, per evitare un'ampiezza eccessiva. Una trasmissione della teoria così concepita e la ripetizione degli stessi numeri mancherebbe di metodo – numerosi medi si trovano di fatto fra gli intervalli di rapporto 2/1 e negli intervalli di rapporto 3/1, il che non ha nulla di sorprendente perché il rapporto 3/1 è il prodotto dei rapporti 2/1 e 3/2.

Pertanto, le operazioni indicate da Platone sono state svolte: in tutti gli intervalli, delle due serie a base 2 e 3, sono stati trovati i due medi, ed i rapporti 3/2 e 4/3 formati da questi medi sono stati divisi per il rapporto 9/8 del tono, il quoziente (del rapporto 4/3 per il quadrato $(9/8)^2$ del tono) avente invece il rapporto del leimma. Queste operazioni hanno condotto così ai valori numerici che abbiamo mostrato in precedenza – la loro classificazione fa apparire 34 termini che, da soli, contengono tutta la scala. Però, Timeo il Pitagorico pretende che la scala comporti 36 termini, benché prenda come limiti estremi gli stessi numeri che ha posto Platone, ossia 384 e 10.368 – non volendo lasciar sussistere alcun disaccordo fra i due, abbiamo cercato e trovato il modo in cui anche i due termini restanti sono stati inseriti nella serie. Desiderosi di avere nella loro scala non solo il rapporto del leimma ma anche quello dell'apotome, hanno scoperto l'apotome in due punti, nei numeri fondamentali e nella serie dei numeri tripli rispetto a quelli, ad esclusione della serie a base 2, ed aggiungendovi un termine in ciascuna delle due serie, hanno così introdotto anche l'apotome nella scala dei suoni. Ora. Platone non ha menzionato l'apotome, ed è questa la ragione per cui noi, accontentandoci del leimma, abbiamo limitato la nostra scala ai termini che stiamo spiegando. Del resto, non si sarebbe potuto creare uno spazio per l'apotome dopo aver scelto il genere diatonico (2 toni e un leimma), nel quale il tono non è suddiviso, mentre l'apotome nasce precisamente quando si divide il tono – il tono è di fatto il prodotto del leimma per l'apotome. Dunque, dal momento che Platone non menziona l'apotome e visto che questo rapporto non si può integrare nel sistema diatonico, sarebbe per noi stato ridicolo cercare di inserire nella nostra scala altri termini con l'unico scopo di porvi anche l'apotome, quando invece i 34 termini studiati sono sufficienti per colmare gli intervalli per mezzo di suoni e di leimmata. Il numero dei 34 termini sembra proprio essere specifico del genere diatonico, che unico ammette il rapporto del tono – infatti, il sistema diatonico ha per base il rapporto 9/8. Ebbene, i rapporti 3/2, 4/3 e leimma sono presenti anche negli altri generi, ma quello diatonico è l'unico fra i tre a conoscere i toni. A buon diritto dunque è proprio il tono che, entrando nella composizione di molti termini, determina il numero di suddivisioni della gamma, e questo numero è il secondo perché conviene alla seconda processione dell'Anima, a partire dai primi Principi Intelligibili.

Se dunque noi prendiamo l'estremità inferiore del terzo intervallo della serie a base 2, ossia il numero 1536, il tono di questo numero, 1728, il tono 1728 che è 1944, il tono di 1944 che è 2187, l'intervallo compreso fra le due estremità 1536 e 2187 comprende tre toni, ma visto che il numero 2048 ha il rapporto 4/3 rispetto a 1536 ed il rapporto del leimma rispetto a 1944, necessariamente il numero 2187 sta al numero 2048 nel rapporto dell'apotome – infatti, come si era detto in precedenza, l'apotome è il quoziente della divisione del tono per il leimma. Ugualmente, prendendo, nel terzo intervallo della serie a base 3, tre volte successivamente il tono di 4608, che dà 6561 [6561 = 4608 x $(9/8)^3$], il numero 6144 uguale ai 4/3 di 4608 ed allo stesso tempo al leimma di 5832, avremo necessariamente l'apotome formando i rapporti dei numeri 6561 e 6144, tripli dei termini fondamentali che avevamo trovato nel terzo intervallo della serie a base 2. Che il rapporto dell'apotome nei termini di questo ultimo intervallo sia fondamentale diviene evidente quando si dimostra con il teorema della sottrazione reciproca che i numeri 2187 e 2048 sono primi fra loro, tenendo a mente che i numeri primi fra loro sono i più piccoli fra quelli che possono esprimere un dato rapporto. Si è dunque mostrato come, seguendo Filolao, Timeo il Pitagorico arrivi al numero 36 di termini, però, come si è detto, la gamma diatonica è invece delimitata dai termini indicati da Platone e senza il rapporto dell'apotome – chiudiamo qui la ricerca su questa questione.

Avevamo detto che, prendendo due numeri di cui uno è il doppio e l'altro il triplo di un medesimo termine, la media aritmetica dell'intervallo di rapporto 2/1 sarà media armonica nell'intervallo di rapporto 3/1, ed il termine doppio sarà media aritmetica fra il termine di base ed il termine triplo. Ora spiegheremo brevemente questa proposizione, dandone anche una dimostrazione – si diano infatti: B il doppio di A, Γ il triplo di A, Δ la media aritmetica fra A e B – la proposizione è vera. Infatti, dal momento che B è il doppio di A, e Γ il triplo di A, B contiene tante volte il numero 4, e Γ il numero 6, quante A contiene il numero 2 (ponendo A=2n, B=4n, Γ=6n, n essendo un numero intero positivo qualunque, si ha: B-A=4n-2n=2n; Γ-B=6n-4n=2n; dal che Γ-B=B-A) – l'eccesso di Γ su B, è uguale all'eccesso di B su A, quindi, B è medio aritmetico fra A e B. Inoltre, poiché B contiene tante volte 4 quanto A contiene 2, la media aritmetica fra A e B, Δ, conterrà tante volte 3 quanto A contiene 2 e B il numero 4; d'altra parte, Γ contiene tante volte 6 quanto B contiene il numero 4. Un medesimo numero sarà dunque il quoziente di A per 2, di Δ per 3, di Γ per 6. Δ sarà perciò media armonica fra A e Γ; il quoziente del limite superiore Γ per l'eccesso del limite superiore rispetto a Δ è in effetti uguale al quoziente del limite inferiore A per l'eccesso di Δ rispetto ad A (ossia: Γ/ Γ – Δ = A/ Δ – A, il che esprime, secondo la definizione di media armonica, che Δ è media armonica fra A e Γ) – e qui possiamo concludere la dimostrazione di questa proposizione.

Seevero ha invece pensato di arrestare la gamma non ad un tono ma ad un leimma, perché anche Platone aveva limitato con un leimma la serie dei rapporti concernenti la suddivisione dell'Anima. Ora, per arrivare ad un leimma come rapporto estremo, egli cambia il valore di certi termini e fissa anche lui la loro totalità al numero 34; però, visto che nel trentaquattresimo termine interviene la frazione ½, egli inizia dal numero 768 che è il doppio di 384. Pertanto, pone come tono di 768 il numero 864, come tono di 864 il numero 972, con 972 mette in accordo secondo il rapporto del leimma il numero 1024; poi prende il tono di 1024, 1152; il tono di 1152, 1296; il tono di 1296, 1458; accorda con 1458, secondo il rapporto del leimma, il numero 1536; come tono di 1536, 1728; come tono di 1728, 1944; con 1944 accorda, secondo il rapporto del leimma, il numero 2048; il tono di 2048, 2304; il tono di 2304, 2592; il tono di 2592, 2916; a 2916 aggiunge, secondo il rapporto del leimma, il numero3072, seguito dal tono di 3072, ossia 3456, e dal tono di 3456, ossia 3888; a 3888 aggiunge, secondo il rapporto del leimma, 4096; tono di 4096, ossia 4608, il tono di 4608, ossia 5184, il tono di 5184, ossia 5832; vi aggiunge, secondo il rapporto del leimma, 6144; il tono di 6144, ossia 6912, il tono di 6912, ossia 6776, il tono di 6776, ossia 8748, il leimma di 8748, ossia 9216; il tono di 9216, ossia 10.368, il tono di 10.368, ossia 11.664, il tono di 11.664, ossia 13. 122, il leimma di 13.122, ossia 13. 824; il tono di 13.824, ossia 15.552, il tono di 15.552, ossia 17.496, il tono di 17.496, ossia 19.683, il leimma di 19.683, ossia 20.736. A questo ultimo numero arresta la disposizione della scala, prendendo come ultimo termine un leimma – però, questa serie di termini comincia con un rapporto di 4/3 (infatti il termine 384, duplicato 768 da cui Severo fa partire la sua scala, è i 4/3 del termine 288, tono di 256), seguito da un rapporto 3/2, a sua volta seguito da un rapporto 4/3, seguito ancora da 3/2, seguito da 4/3, seguito da 3/2, al quale seguono tre rapporti di 3/2 consecutivi, come risulta da quel che abbiamo appena detto sulla serie. Quindi, anche la gamma di Severo contiene quattro ottave ed una quinta, ed ugualmente vi domina il tono – di fatto, tre rapporti consecutivi di 3/2 fanno un'ottava, un tono e una quinta (si ha infatti: 3/2 x 3/2 x 3/2 = 27/8 = 2/1 x 9/8 x 3/2 – quindi, 2/1 rapporto di ottava, 9/8 il tono, 3/2 rapporto di quinta). Però, questa gamma non finisce con un tono, bensì con un leimma, il che rientra nei propositi del suo autore: Severo infatti non è che sopprima il tono, piuttosto conclude la sua gamma a un rapporto differente rispetto a quello del tono. Così, nei sistemi di tutti i teorici, la gamma comprende nella sua totalità quattro ottave, una quinta ed un tono – e se vogliamo esprimere questi intervalli per mezzo di numeri interi, constateremo che questa scala di suoni progredisce fino al 27. Infatti, il numero 2 è il doppio di 1; il doppio di 4 è 8; il doppio di 8 è 16 – di modo che così, fino a questo punto, abbiamo quattro ottave; i 3/2 di 16 è 24, termine che marca la quinta; infine, rispetto a 24, il numero 27 ha il rapporto del tono, 9/8 – così da 1 a 27 gli accordi indicati si trovano realizzati. Ebbene, questo è appunto il tratto in comune fra tutti i sistemi di rappresentazione – la differenza fra i vari sistemi è invece che gli uni sono disposti in forma di Λ, mentre gli altri seguono una linea retta. Fra gli Antichi, Adrasto ha dato la sua preferenza ai sistemi a Λ, mentre Severo a quelli secondo la linea retta – e c'è da dire che in effetti quest'ultimo procedimento è il migliore, anche perché nel sistema a Λ gli stessi numeri si incontrano su ciascuna delle due linee della lambda, il che non corrisponde all'intenzione di Platone. Infatti, non ci sono due divisioni dell'Anima identiche fra loro; al contrario, tutti gli intervalli presi in considerazione sono divisioni dell'Anima. Inoltre, alcuni di questi sistemi si fermano al tono, altri al leimma; gli uni sono più esatti, ma fanno ricorso due volte agli stessi numeri, come coloro che dividono le serie a base 2 e 3 sui lati dei triangoli; gli altri non pongono che una sola volta ciascun numero in tutti gli intervalli, ma non riescono a compiere che con difficoltà la suddivisione degli intervalli della serie a base 2 in intervalli parziali espressi con frazioni il cui numeratore supera il denominatore di una o più unità.

***

Concludiamo questa prima sezione del *Trattato sull'Armonia* con il bellissimo passo di Macrobio (*Commento al Sogno di Scipione* II, 2, 21-24): “Perciò il dottissimo Tullio Cicerone, nelle sue parole, mostra la profondità della somma dottrina platonica: *'ma che suono è questo, così intenso ed armonioso, che riempie le mie orecchie?' dissi.'E' il suono' rispose 'che separato in funzione di intervalli ineguali, eppure distinti da una razionale proporzione, è cagionato dalla spinta e dal moto delle sfere stesse.'* Come vedi, fa menzione degli intervalli ed attesta che questi sono ineguali fra essi, senza peraltro contestare che siano caratterizzati da un sistema razionale, perché, secondo il

Timeo di Platone, gli intervalli tra i numeri ineguali sono distinti da rapporti numerici proporzionali, quali gli emioli, gli epitriti, gli epogdoi ed i semitoni, che costituiscono l'insieme di ogni tipo di armonia. Si capisce bene da questo passo che sarebbe stato impossibile comprendere il valore delle espressioni di Cicerone, se non le avessimo fatte precedere da una discussione sul sistema degli emioli, degli epitriti e degli epogdoi, che distinguono gli intervalli, e non si fossero spiegati i numeri che, secondo Platone, sono entrati nella composizione dell'Anima del Cosmo, e se non avessimo fatto conoscere la ragione per la quale la struttura dell'Anima è stata ordita con i numeri che creano la musica. L'insieme di queste spiegazioni, infatti, ci dà un'idea precisa sia della causa del moto del Cosmo, dovuto al solo impulso dell'Anima, sia della necessità dell'armonia musicale che l'Anima imprime al movimento nato da essa, armonia che era in sé innata fin dall'origine."

Continua ...

"II – Spiegazione conforme alla realtà delle cose"